2026 年度（令和 8 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2025 年（令和 7 年）8 月 20 日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚，問題は全部で４問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること.
答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 解答は日本語または英語で記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] a, b を $a < b$ をみたす実数とする．$\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ が，$g(a) = g(b) = 0$ を満足する任意の $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数 $g(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = 0$$

をみたすとする．

(1) $[a, b]$ 上の非負実数値連続関数 $k(x)$ が

$$\int_a^b k(x)\,dx = 0$$

をみたすならば，$k(x)$ は $[a, b]$ 上で常に 0 であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $h(x)$ に対して，次をみたすような $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数 $g(x)$ と実数 α が存在することを示せ．

$$g(a) = g(b) = 0 \quad \text{かつ} \quad g'(x) = h(x) - \alpha \ (x \in \mathbb{R}).$$

(3) $c = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とおくと，任意の $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $h(x)$ に対して

$$\int_a^b (f(x) - c)\,h(x)\,dx = 0$$

が成立することを示せ．

(4) $f(x)$ は $[a, b]$ 上で定数関数であることを示せ．

[2] $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次列ベクトル全体からなる実線形空間とする:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の標準内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ で表し，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ とおく:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j, \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\; \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

3 次の実正方行列全体のなす実線形空間を V とおき，$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in V$ とする.

(1) S の固有値をすべて求めよ.

(2) 集合 $\{\langle S\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ かつ $\|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ の最大値を求めよ.

(3) $W = \{SX - XS \mid X \in V\}$ とおくとき，W が V の線形部分空間であることを示し，W の次元を求めよ.

[3] 実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}$ に 1 次元ユークリッド空間としての位相を入れた位相空間を X とする．$\mathbb{R}$ に

$$\mathcal{O} = \{U \mid U \subset \mathbb{R} \text{ であり，かつ } \mathbb{R} \setminus U \text{ は高々可算な集合である}\} \cup \{\emptyset,\ \mathbb{R}\}$$

を開集合系とする位相を入れた位相空間を Y とする．

(1) A を $\mathbb{R}$ の無限部分集合とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を A の点列で，$n \neq m$ ならば常に $a_n \neq a_m$ をみたすものとする．さらに，任意の正の整数 n に対して

$$U_n = \mathbb{R} \setminus \{a_{n+k} \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

と定める．このとき，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ となることを示せ．また，A は Y のコンパクト部分集合であるかどうか，理由をつけて答えよ．

(2) B を $\mathbb{R}$ の有限部分集合とする．B が 2 つ以上の元を含むとき，B は Y の連結部分集合であるかどうか，理由をつけて答えよ．

(3) X の部分位相空間 $\{x \in X \mid 0 \leq x \leq 1\}$ を I とおく．連続写像 $f\colon I \to Y$ で，$f(0) = 0$ かつ $f(1) = 1$ をみたすものは存在しないことを示せ．

[4] 虚数単位を i で表す．a を正の実数とし，複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iaz} - ae^{iz} + a - 1}{z^3}$$

を考える．

(1) 孤立特異点 $z = 0$ における $f(z)$ のローラン展開の主要部を求めよ．

(2) $r > 0$ に対し，曲線 C_r を $C_r : z = re^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ で定める．このとき $\displaystyle\lim_{r \to +0} \int_{C_r} f(z)\, dz$ および $\displaystyle\lim_{r \to \infty} \int_{C_r} f(z)\, dz$ の値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax) - a \sin x}{x^3}\, dx$ の値を求めよ．